

קיץ ב' 2018 – שאלון 035182

אלגברה

1. א. אורית קנתה ספר שמחירו 80 שקלים וקיבלה עליו הנחה של 25%.
 כמה שקלים שילמה אורית על הספר?
 ב. מחיר חוברת היה x שקלים. המחיר ירד ב-21 שקלים, שהם 25% מן המחיר המקורי.
 מה היה מחיר החוברת לפני ההוזלה?

פתרון:

- א. נתון שאורית קיבלה הנחה של 25% שקלים על ספר. מכאן שהיא שילמה 75% מהמחיר ההתחלתי (100%):
 המחיר שאורית שילמה = 25% הנחה – 100% מחיר הספר ההתחלתי

$$\text{המחיר שאורית שילמה} = \frac{25}{100} \cdot \text{מחיר הספר ההתחלתי} - \frac{100}{100} \cdot \text{מחיר הספר ההתחלתי}$$

$$\text{המחיר שאורית שילמה} = \frac{75}{100} \cdot \text{מחיר הספר המקורי}$$

ידוע שמחירו ההתחלתי של הספר היה 80 שקלים:

$$80 \cdot \frac{75}{100} = \text{המחיר שאורית שילמה}$$

$$80 \cdot \frac{75}{100} = 60$$

תשובה:

אורית שילמה על הספר לאחר ההנחה 60 שקלים

- ב. נתונים לנו ערכי ההנחה על מחיר החוברת x, הן באחוזים והן בשקלים. נשתמש בנתונים אלו על מנת לבנות משוואה:

$$21 \text{ שקלים} = 25\% - x$$

$$x \cdot \frac{25}{100} = 21$$

$$0.25x = 21 \quad / \div 0.25$$

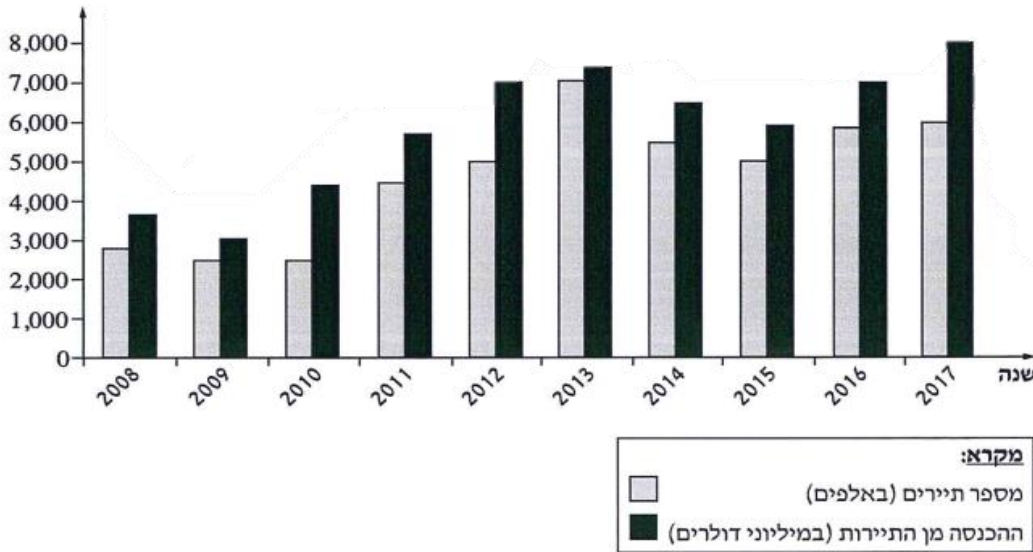
$$x = \frac{21}{0.25}$$

$$x = 84$$

תשובה:

מחיר החוברת לפני ההנחה x הוא 84 שקלים

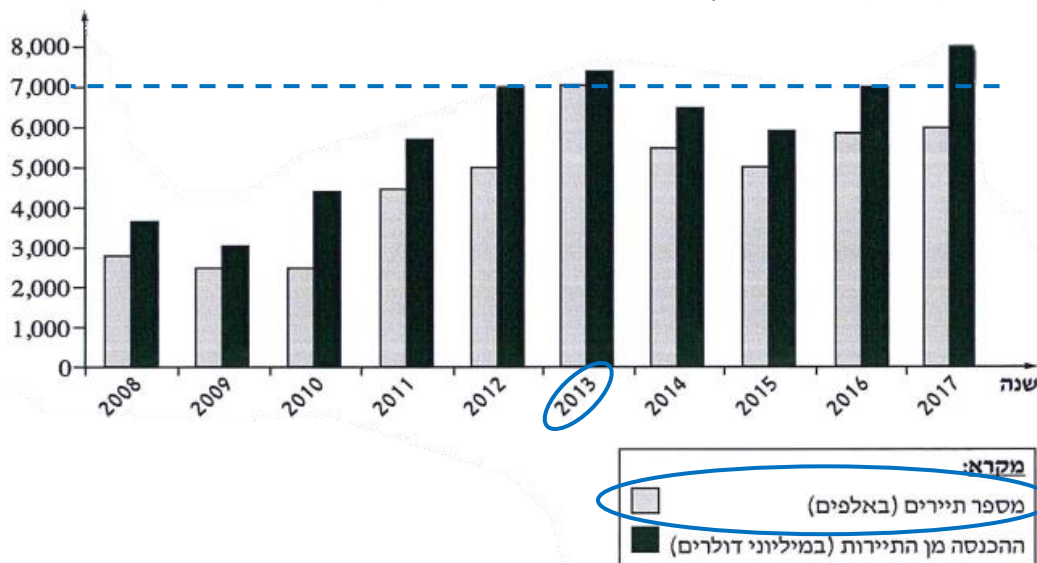
2. הגרף שלפניך מתאר את מספר התיירים שנכנסו למדינה מסוימת ואת ההכנסה מן התיירות למדינה זו בכל אחת מן השנים 2008 - 2017.



- א. באיזו שנה מספר התיירים שנכנסו למדינה היה הגדול ביותר?
- ב. באיזו שנה ההכנסה מן התיירות הייתה הגבוהה ביותר?
- ג. באילו שנים נכנסו למדינה פחות מארבעה מיליון תיירים?
- ד. באילו שנים הייתה ההכנסה מן התיירות נמוכה מ-4,000,000,000 דולר?
- ה. כמה דולרים בממוצע הכניס כל תייר למדינה בשנת 2017? נמק.

פתרון:

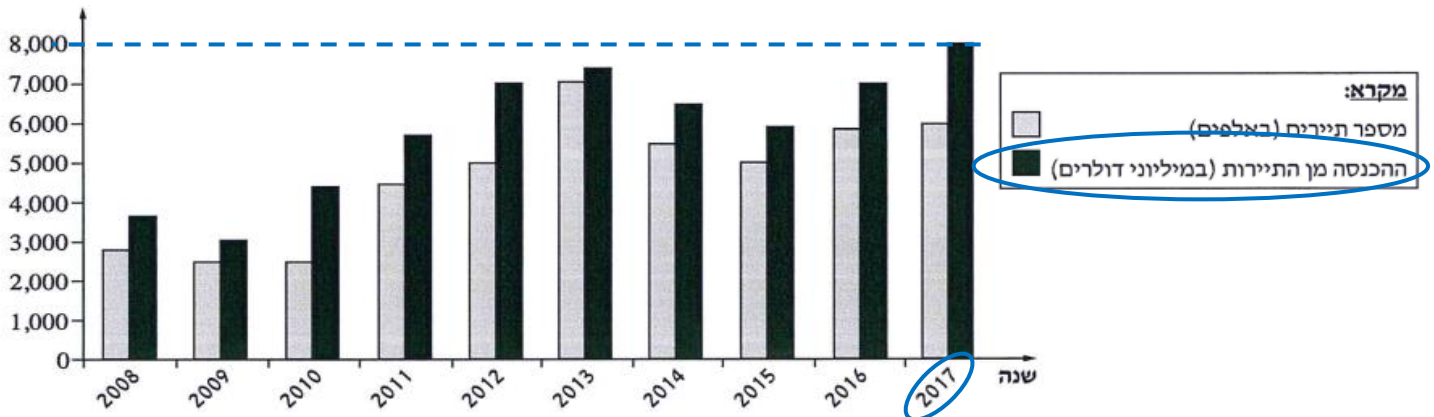
א. נבדוק באיזו שנה מספר התיירים המיוצג בעמודה הבהירה הוא הגבוה ביותר:



תשובה:

על פי התרשים בשנת 2013 הייתה כמות התיירים הגדולה ביותר

ב. נבדוק באיזו שנה ההכנסה מן התיירות המיוצגת בעמודה הכהה היא הגבוהה ביותר:



תשובה:

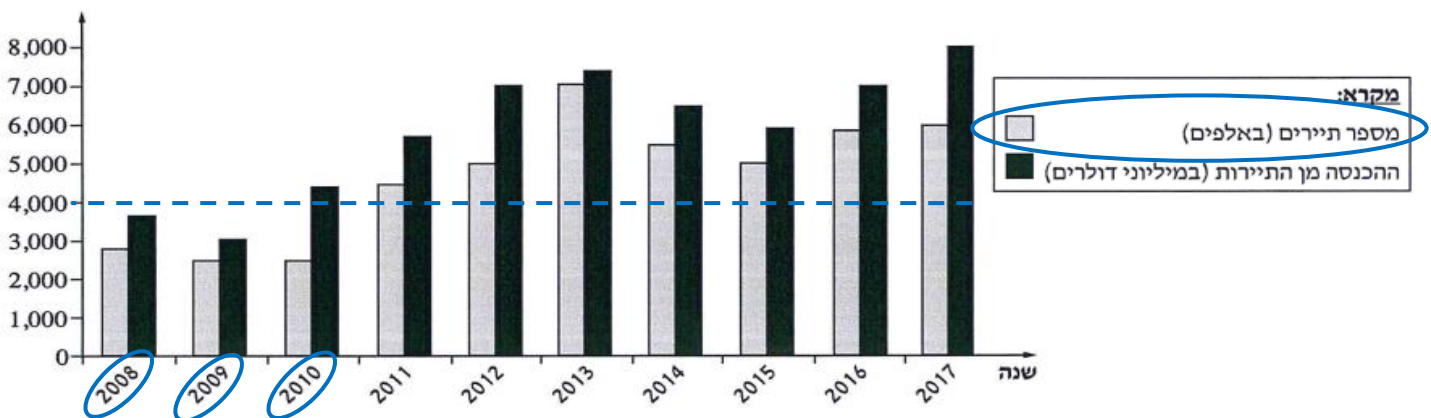
על פי התרשים בשנת 2017 ההכנסה מן התיירות הייתה הגבוהה ביותר

ג. נשאלנו לגבי השנים בהן מספר התיירים היה נמוך מארבעה מליון תיירים. נשים לב שבמקרא רשום לנו שמספר התיירים בעמודה האפורה נמדד באלפים, ואילו סך ההכנסה מן התיירות בעמודה הכהה נמדד במיליונים. משמעות הדבר שיש להכפיל את ערכי ה-Y של העמודות הבהירות ב-1,000 ואת ערכי ה-Y של העמודות הכהות ב-1,000,000.

מספר התיירים באותה שנה = $1,000 \cdot$ ערך ה- y של העמודה

מכאן שיש לבדוק באילו שנים בתרשים העמודה הבהירה נמוכה מ-4,000:

$4,000 \cdot 1,000 = 4,000,000$



תשובה:

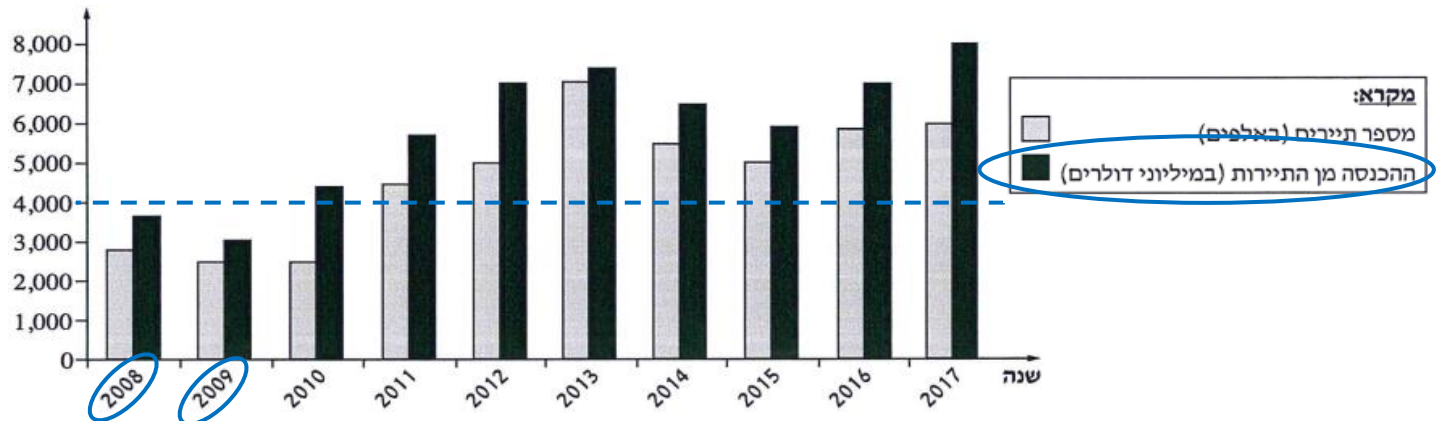
על פי התרשים בשנים 2008, 2009 ו-2010 נכנסו למדינה פחות מארבעה מליון תיירים

ד. הפעם נשאלנו על שנים בהן ההכנסה מן התיירות הייתה נמוכה מ-4,000,000,000 דולר, וידוע לנו שההכנסה המוצגת בגרף נמדדת במיליוני דולרים.

ההכנסה מן התיירות באותה שנה = $1,000,000 \cdot$ ערך ה- y של העמודה

מכאן שיש לבדוק באילו שנים בתרשים העמודה הכהה נמוכה מ-4,000:

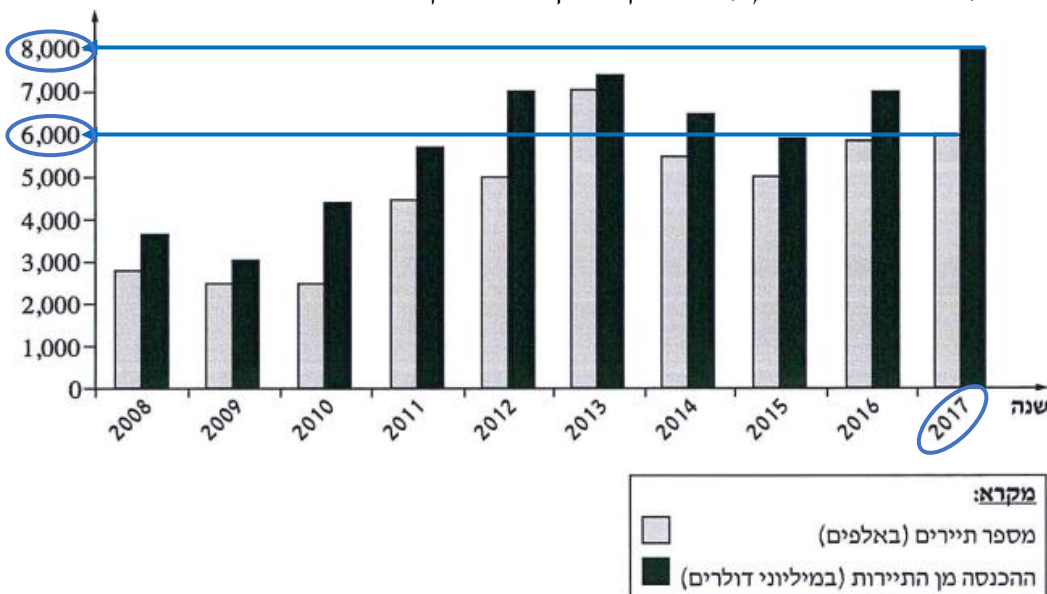
$$4,000 \cdot 1,000,000 = 4,000,000,000$$



תשובה:

על פי התרשים בשנים 2008 ו-2009 ההכנסה הייתה נמוכה מ-4,000,000,000

ה. כדי למצוא את ההכנסה הממוצעת מתייר בשנת 2017, עלינו לחלק את סך ההכנסה לן התיירות במספר התיירים באותה שנה:



מספר התיירים (באלפים):

מספר התיירים = $1,000 \cdot y$ – ערך ה- y של העמודה

$$6,000 \cdot 1,000 = 6,000,000$$

ההכנסה מן התיירות (במליוני דולרים):

ההכנסה מן התיירות = $1,000,000 \cdot y$ – ערך ה- y של העמודה

$$8,000 \cdot 1,000,000 = 8,000,000,000$$

$$\frac{\text{ההכנסה מן התיירות}}{\text{מספר התיירים}} = \text{ההכנסה הממוצעת מתייר}$$

$$\frac{8,000,000,000}{6,000,000} = \text{ההכנסה הממוצעת מתייר}$$

$$\text{ההכנסה הממוצעת מתייר} = 1,333.333$$

תשובה:

בשנת 2017 הכניס כל תייר בממוצע 1,333.333 שקלים

3. בסדרה חשבונית יש 16 איברים. האיבר השלישי בסדרה הוא 17 והפרש הסדרה הוא 4.
- א. מצא את האיבר ה-11 בסדרה.
- ב. מצא את האיבר האחרון בסדרה.
- ג. מצא את הסכום של 6 האיברים האחרונים בסדרה.

פתרון:

א. בשאלה נתון:

- האיבר השלישי בסדרה הוא 17 $\leftarrow a_3 = 17$
- הפרש הסדרה הוא 4 $\leftarrow d = 4$

נציב בנוסחה לאיבר כללי את הנתונים במטרה לחלץ את ערכו של האיבר הראשון:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_3 = a_1 + (3 - 1)d$$

$$17 = a_1 + 2 \cdot 4$$

$$17 = a_1 + 8 \quad /-8$$

$$a_1 = 17 - 8$$

$$a_1 = 9$$

קעת נשתמש שוב בנוסחה לאיבר כללי ונציב בה גם את ערכו של האיבר הראשון, במטרה למצוא את האיבר ה-11:

$$a_{11} = a_1 + (11 - 1)d$$

$$a_{11} = 9 + 10 \cdot 4$$

$$a_{11} = 49$$

תשובה:

ערכו של האיבר ה-11 הוא 49

ב. בשאלה נתון:

בסדרה חשבונית יש 16 איברים –

נשתמש בנוסחה לאיבר כללי כדי למצוא את האיבר ה-16:

$$a_{16} = a_1 + (16 - 1)d$$

$$a_{16} = 9 + 15 \cdot 4$$

$$a_{16} = 69$$

תשובה:

ערכו של האיבר ה-16 שהוא האיבר האחרון בסדרה הוא 69

ג. התבקשנו למצוא את סכום 6 האיברים האחרונים בסדרה. כדי לעשות זאת, עלינו למצוא את הסכום של האיברים $a_{16}, a_{15}, a_{14}, a_{13}, a_{12}, a_{11}$. כדי להימנע מחישוב של כל אחד מהאיברים, נחשב את סכום הסדרה כולה, ונחסר ממנו את סכום של 10 האיברים הראשונים:

$$S_{16} - S_{10} = S_{6 \text{ איברים אחרונים}}$$

נשים לב שנוכל לחשב את הערך S_{10} איברים ראשונים בעזרת הנוסחה למציאת סכום סדרה:

$$S_n = \frac{n[2a_1 + d \cdot (n - 1)]}{2}$$

$$S_{10} = \frac{10 \cdot [2 \cdot 9 + 4 \cdot (10 - 1)]}{2}$$

$$S_{10} = \frac{10 \cdot [18 + 4 \cdot 9]}{2}$$

$$S_{10} = \frac{10 \cdot 54}{2}$$

$$S_{10} = 270$$

כעת נמצא את סכום הסדרה כולה:

$$S_{16} = \frac{16 \cdot [2 \cdot 9 + 4 \cdot (16 - 1)]}{2}$$

$$S_{16} = \frac{16 \cdot [2 \cdot 9 + 4 \cdot (16 - 1)]}{2}$$

$$S_{16} = \frac{16 \cdot [18 + 4 \cdot 15]}{2}$$

$$S_{16} = \frac{16 \cdot 78}{2}$$

$$S_{16} = 624$$

נחסר בין הסכומים שמצאנו במטרה למצוא את סכום האיברים האחרונים:

$$S_{16} - S_{10} = S_{6 \text{ איברים אחרונים}}$$

$$624 - 270 = S_{6 \text{ איברים אחרונים}}$$

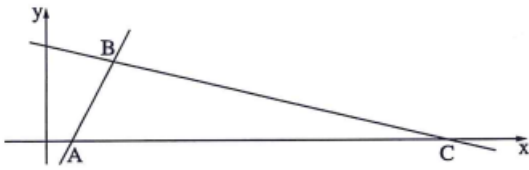
$$S_{6 \text{ איברים אחרונים}} = 354$$

תשובה:

סכום 6 האיברים האחרונים הוא 354

4. הישר שמשוואתו $y = 2x - 3$ והישר שמשוואתו $y = -\frac{1}{4}x + 6$

יוצרים עם ציר ה-x את המשולש ABC (ראה ציור).



א. מצא את שיעורי הקודקודים A, B ו-C.

ב. מצא את אורך הצלע AC.

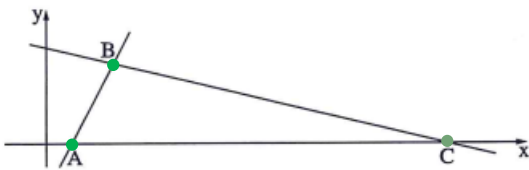
ג. חשב את שטח המשולש ABC.

פתרון:

א. נתבונן בקודקודי המשולש:

קודקוד B הוא נקודת החיתוך בין הישרים, ואילו הקודקודים A ו-C

הינם נקודות החיתוך של כל אחד מהישרים עם ציר ה-x.



נתחיל במציאת נקודת החיתוך בין הישרים –

על מנת למצוא את נקודת החיתוך בין הישרים M נשווה בין משוואותיהם:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{4}x + 6 \end{cases}$$

$$2x - 3 = -\frac{1}{4}x + 6 \quad /+3 + \frac{1}{4}x$$

$$2x + \frac{1}{4}x = 6 + 3$$

$$2\frac{1}{4}x = 9 \quad /\div 2\frac{1}{4}$$

$$x = 4$$

מצאנו את שיעור ה-x של הנקודה B, וכדי למצוא את שיעור ה-y פשוט נציב ערך זה באחת המשוואות:

$$y = 2x - 3$$

$$y = 2 \cdot 4 - 3$$

$$y = 5$$

$$B(4, 5)$$

כעת נעבור לבחן את הקודקודים A ו-C. אמנם לא נתון לנו מי מהישרים AB ו-BC מתאים לאיזו משוואה, אולם נוכל להסיק זאת על פי השיפוע שלהם:

$$y = 2x - 3 \leftarrow \text{שיפוע חיובי (2), ולכן הישר עולה} - \text{מדובר בישר AB.}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 6 \leftarrow \text{שיפוע שלילי } \left(-\frac{1}{4}\right), \text{ ולכן הישר יורד} - \text{מדובר בישר BC.}$$

נמצא את הקודקוד A שהוא נקודת החיתוך בין הישר AB לציר ה-x:

$$y = 0 \leftarrow \text{חיתוך עם ציר ה-x}$$

$$y = 2x - 3$$

$$0 = 2x - 3 \quad /+3$$

$$3 = 2x \quad /\div 2$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

$$A(1.5, 0)$$

נמצא את הקודקוד C שהוא נקודת החיתוך בין הישר BC לציר ה-x:

$$y = 0 \leftarrow \text{חיתוך עם ציר ה-x}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 6$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 6 \quad /+\frac{1}{4}x$$

$$\frac{1}{4}x = 6 \quad /\div \frac{1}{4}$$

$$x = 24$$

$$C(24, 0)$$

תשובה:

שיעורי קודקודי המשולש ABC: $A(1.5, 0)$, $B(4, 5)$, ו- $C(24, 0)$

ב. הצלע AC מונחת על גבי ציר ה-x, ולכן נוכל מצוא את אורכה באמצעות חיסור שיעור ה-x הקטן של קודקוד A משיעור ה-x הגדול של קודקוד C:

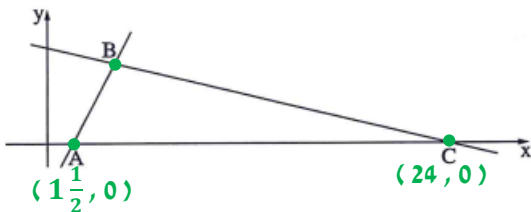
$$AC = x_C - x_A$$

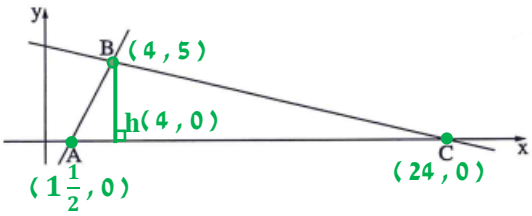
$$AC = 24 - 1.5$$

$$AC = 22.5$$

תשובה:

אורך הצלע AC הוא 22.5 יחידות





ג. כדי לחשב שטח משולש אנו זקוקים לגובה ולצלע. את אורך הצלע AC
 חישבנו בסעיף ב', וכעת נמתח אליה גובה מהקודקוד B, לנקודה h:
 נקודה h נמצאת על ציר ה-x כלומר שיעור ה-y שלה הוא 0.

כדי למצוא את אורך הגובה, נחסר את שיעור ה-y הקטן של הנקודה h משיעור ה-y הגדול של קודקוד B:

$$Bh = y_B - y_h$$

$$Bh = 5 - 0$$

$$Bh = 5$$

מצאנו שאורך הגובה הוא 5 יחידות, וחישבנו שאורך הצלע AC הוא $22\frac{1}{2}$ יחידות:

$$S_{\text{משולש}} = \frac{h \cdot \text{צלע}}{2}$$

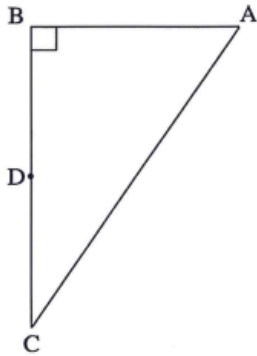
$$S_{ABC} = \frac{Bh \cdot AC}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{5 \cdot 22.5}{2} = 56.25$$

תשובה:

שטח המשולש ABC הוא 56.25 יח"ר

טריגונומטריה



5. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$).

נתון: $AB = 4$, $AC = \sqrt{52}$.

א. מצא את אורך הצלע BC.

נתון: הנקודה D היא אמצע הצלע BC.

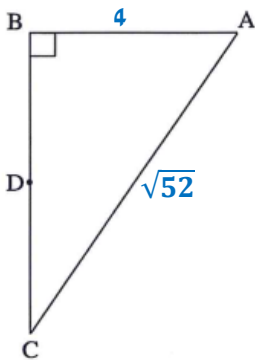
ב. מהו אורך הקטע BD?

ג. חשב את גודל הזווית BAD.

ד. חשב את גודל הזווית DAC.

פתרון:

א. נשתמש באורכי הניצב AB והיתר AC הנתונים על מנת לחשב את אורך הניצב BC באמצעות משפט פיתגורס:



$$\text{יתר}^2 = \text{ניצב}^2 + \text{ניצב}^2$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$52 = 4^2 + BC^2$$

$$16 + BC^2 = 52 \quad /-16$$

$$BC^2 = 36 \quad /\sqrt{\quad}$$

$$BC = 6$$

תשובה:

אורכה של הצלע BC הוא 6 יחידות

ב. נתון שהנקודה D היא אמצע הצלע BC אותה חישבנו בסעיף הקודם:

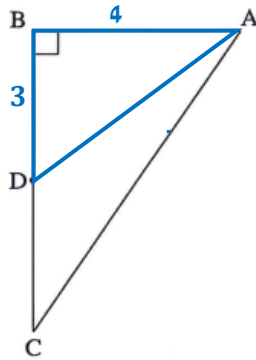
$$BD = DC = \frac{1}{2} BC$$

$$BD = \frac{1}{2} \cdot 6$$

$$BD = 3$$

תשובה:

אורכו של הקטע BD הוא 3 יחידות



ג. נתבונן במשולש ישר הזווית BAD –

נשתמש בנוסחת הטנגנס במטרה לחשב את ערך הזווית $\angle BAD$:

$$\tan \angle BAD = \frac{BD}{AB}$$

$$\tan \angle BAD = \frac{3}{4}$$

$$\tan \angle BAD = 0.75$$

$$\angle BAD = 36.87^\circ$$

תשובה:

$$\angle BAD = 36.87^\circ$$

ד. נשים לב שהזווית $\angle DAC$ אותה התבקשנו למצוא היא ההפרש בין הזווית $\angle BAD$ אותה חישבנו בסעיף הקודם

לזווית $\angle BAC$. נשתמש בנוסחת הטנגנס במשולש BAC על מנת למצוא את ערכה:

$$\tan \angle BAC = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan \angle BAC = \frac{6}{4}$$

$$\tan \angle BAC = 1.5$$

$$\angle BAC = 56.31^\circ$$

כעת נמצא את ההפרש בין הזוויות:

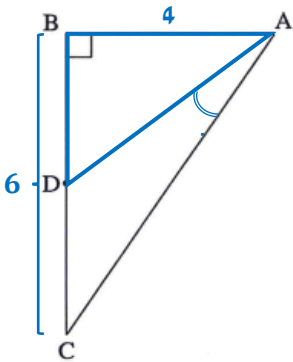
$$\angle DAC = \angle BAC - \angle BAD$$

$$\angle DAC = 56.31 - 36.87$$

$$\angle DAC = 19.44^\circ$$

תשובה:

$$\angle DAC = 19.44^\circ$$



הסתברות וסטטיסטיקה

6. לתושבי אחד האיים באוקיינוס הוצע להתחסן נגד מחלה מקומית. חוסנו רק האנשים שרצו בכך.

שנה לאחר שניתן החיסון, בדקו מי מכל תושבי האי חלה במחלה

הזאת.

לפניך טבלה המציגה את התוצאות.

א. כמה תושבים בסך הכול יש באי?

לא חוסנו	חוסנו	
300	200	חלו במחלה המקומית
600	800	לא חלו במחלה המקומית

בחרו באקראי אדם מן האי.

ב. מהי ההסתברות שהוא חלה במחלה המקומית?

ג. מהי ההסתברות שהוא חוסן בשנה זו נגד המחלה המקומית?

ד. בחרו באקראי תושב אחד מן התושבים שחוסנו. מהי ההסתברות שהוא חלה במחלה המקומית?

פתרון:

א. כדי למצוא את מספר התושבים באי, עלינו לסכום את כל התושבים – התושבים שחוסנו וחלו, התושבים שחוסנו ולא

חלו, התושבים שלא חוסנו וחלו, והתושבים שלא חוסנו ולא חלו:

לא חוסנו	חוסנו	
300	200	חלו במחלה המקומית
600	800	לא חלו במחלה המקומית

$$300 + 200 + 600 + 800 = 1,900$$

$$= 1,900 \text{ מספר התושבים באי}$$

תשובה:

באי יש בסך הכול 1,900 תושבים

ב. נתון שנבחר באקראי אחד מהתושבים. כדי למצוא את ההסתברות שהוא חלה, עלינו לחשב את מספר החולים הכולל

מתוך כלל התושבים, בלי קשר לחיסונים:

לא חוסנו	חוסנו	
300	200	חלו במחלה המקומית
600	800	לא חלו במחלה המקומית

$$P(\text{ההסתברות לבחור באדם שחלה}) = \frac{\text{מספר התושבים החולים}}{\text{מספר התושבים הכולל}}$$

$$P(\text{ההסתברות לבחור באדם שחלה}) = \frac{200 + 300}{1,900}$$

$$P(\text{ההסתברות לבחור באדם שחלה}) = \frac{500}{1,900} = \frac{5}{19}$$

תשובה:

ההסתברות לבחור באדם חולה היא $\frac{5}{19}$

ג. כדי למצוא את ההסתברות שהאדם שחוסן, עלינו לחשב את מספר המחוסנים הכולל מתוך כלל התושבים, בלי קשר לחולים:

לא חוסנו	חוסנו	
300	200	חלו במחלה המקומית
600	800	לא חלו במחלה המקומית

$$P(\text{ההסתברות לבחור באדם שחוסן}) = \frac{\text{מספר התושבים המחוסנים}}{\text{מספר התושבים הכולל}}$$

$$P(\text{ההסתברות לבחור באדם שחוסן}) = \frac{200 + 800}{1,900}$$

$$P(\text{ההסתברות לבחור באדם שחוסן}) = \frac{1,000}{1,900} = \frac{10}{19}$$

תשובה:

ההסתברות לבחור באדם שחוסן היא $\frac{10}{19}$

ד. כעת נשאלנו מהי ההסתברות לבחור באדם שחלה מתוך האנשים שחוסנו. כלומר, עלינו לחשב את מספר החולים, מתוך קבוצת האנשים שחוסנו:

לא חוסנו	חוסנו	
300	200	חלו במחלה המקומית
600	800	לא חלו במחלה המקומית

שימו לב לא לכלול בחישוב את החולים שלא קיבלו חיסון, מפני שלא עליהם נשאלנו!

$$P(\text{ההסתברות לבחור באדם שחוסן וחלה}) = \frac{\text{מספר התושבים החולים}}{\text{מספר התושבים המחוסנים}}$$

$$P(\text{ההסתברות לבחור באדם שחוסן וחלה}) = \frac{200}{200 + 800}$$

$$P(\text{ההסתברות לבחור באדם שחוסן וחלה}) = \frac{200}{1,000} = \frac{2}{10}$$

תשובה:

ההסתברות לבחור באדם שחלה מתוך התושבים שחוסנו היא $\frac{1}{5}$